Lösung zur Übung 11 WS 11/12

Aufgabe 38.a

$$\lim_{x \to 1} \frac{ln(x)}{tan(x-1)} \tag{1}$$

Ist vom Typ 0/0, also Anwendung von l'Hospital:

$$= \lim_{x \to 1} \frac{1/x}{1/cos^2(x-1)} \tag{2}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{cos^2(x-1)}{x} \tag{3}$$

$$= \frac{\lim_{x \to 1} cos^2(x-1)}{\lim_{x \to 1} x} \tag{4}$$

$$= \frac{cos^2(1-1)}{1} = 1 \tag{5}$$

Aufgabe 38.b

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^{n+1} - x}{x^{n+1} - 1} \tag{6}$$

ebenfalls vom Typ 0/0:

$$= \lim_{x \to 1} \frac{(n+1)x^n - 1}{(n+1)x^n} \tag{7}$$

$$= \frac{n}{n+1} \tag{8}$$

Aufgabe 38.c

$$\lim_{x\to\infty} \frac{ln(x)}{\sqrt(x)} \tag{9}$$

Dies ist vom Typ ∞/∞ und lässt sich ebenso mittels L'Hospitalsche Regel lösen:

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{2\sqrt(x)}} \tag{10}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{2\sqrt{x}}{x} \tag{11}$$

Erneute Anwendung der Regel von L'Hospital:

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2}{2\sqrt{x}}}{1} \tag{12}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} \tag{13}$$

$$= 0 \tag{14}$$

Aufgabe 38.d

Die Aufgabe wird durch mehrfache Anwendung der Regel von L'Hospital gelöst.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{e^x} \tag{15}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2}{e^x} \tag{16}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{6x}{e^x} \tag{17}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{6}{e^x} \tag{18}$$

$$= 0 \tag{19}$$

39

a)

$$y(x) = -\frac{1}{x} \tag{20}$$

Bei der Legendre-Transformation wird die Funktion $y(x)$ in eine Funktion$g(p)$ transformiert. Die Funktion $g(p)$ wird durch folgenden Zusammenhang beschrieben.

$$g(p) = x(p) \cdot p - y(x(p)) \tag{21}$$

Zur Bestimmung der Funktion g(p) müssen wir daher die Ausdrücke x und $y(x)$ durch Ausdrücke von p ersetzen.Die Variable p wird hierbei durch die Ableitung der Funktion y(x) beschrieben.

$$p = \frac{dy}{dx} \tag{22}$$

Wenden wir diese Eigenschaft auf die Funktion an erhalten wir für p folgenden Ausdruck

$$p = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x^2} \tag{23}$$

Da x durch p dargestellt werden soll muss die Gleichung nach x aufgelöst werden.

$$x(p) = \frac{1}{\sqrt{p}} \tag{24}$$

Dieser Ausdruck kann in die Funktion $g(p)$ eingesetzt werden.

$$g(p) = \frac{1}{\sqrt{p}} \cdot p - \left[-\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{p}}}\right] \tag{25}$$

$$g(p) = \frac{1}{\sqrt{p}} \cdot p - [-\sqrt{p}] \tag{26}$$

Zusammenfassen des Ausdrucks ergibt das Endergebnis.

$$g(p) = 2\sqrt{p} \tag{27}$$

b)

$$y(x) = \frac{x^3}{3} \tag{28}$$

Die Aufgabe wird wie Aufgabenteil a) gelöst. Es gilt:

$$g(p) = x(p) \cdot p - y(x(p)) \tag{29}$$

mit

$$p = \frac{dy}{dx} p = x^2 \tag{30}$$

Wir müssen wieder x durch einen Ausdruck von p darstellen

$$x(p) = \sqrt{p} \tag{31}$$

Dieser Ausdruck wird ebenfall in die Gleichung $g(p)$ eingesetzt

$$g(p) = \sqrt{p} \cdot p - \frac{\sqrt{p}^3}{3} \tag{32}$$

auch hier können die beiden Terme zusammengefasst werden.

$$g(p) = \frac{2\sqrt{p}^3}{3} \tag{33}$$

40

Bei dieser Aufgabe soll unter Verwendung der Legendre-Transformation folgende Differentialgleichung (DGL) gelöst und die Funktion $y(x)$ bestimmt werden. Dass heißt, wir müssen zuerst die transformierte Funktion $g(p)$ bestimmen um daraufhin eine Rücktransformation zu y(x) durchführen zu können. Die DGL lautet:

$$y'(x) - \ln(xy'(x) - y(x)) = 0 \tag{34}$$

$y'(x)$ ist nichts anderes als $\frac{dy}{dx}$ hierfür gilt wiederum $p = \frac{dy}{dx}$. Dieser Ausdruck wird in die Gleichung eingesetzt.

$$p - \ln(x \cdot p - y(x)) = 0 \tag{35}$$

Der Ausdruck innerhalb des ln entspricht der Definition von g(p) Somit vereinfacht sich die DGl zu

$$p - \ln(g(p)) = 0 \tag{36}$$

und kann nach $g(p)$ aufgelöst werden.

$$p = \ln(g(p)) \tag{37}$$

$$e^p = g(p) \tag{38}$$

Nun haben wir die Legendre-transformierte Funktion von $y(x)$ bestimmt. Um nun die Funktion y(x) zu erhalten, wenden wir nochmals die Legendre-Transformation an. Hierbei gilt

$$y(x) = p(x) \cdot x - g(p(x)) \tag{39}$$

Da wir die Legendre-Transformation von $g(p)$ bestimmen möchten gilt

$$x = \frac{dg}{dp} \tag{40}$$

Absofort gehen wir wie in Aufgabe 39 vor. Wir bestimmen somit die Ableitung der Funktion $g(p)$ und lösen das Ergebnis nach p auf

$$x = \frac{dg}{dp} = e^p \tag{41}$$

$$p(x) = \ln(x)) \tag{42}$$

Dieser Ausdruck wird in die Gleichung eingesetzt

$$y(x) = \ln(x) \cdot x - e^{ln(x)} \tag{43}$$

$$y(x) = \ln(x) \cdot x - x \tag{44}$$

Probe

$$y(x) = \ln(x) \cdot x - x \tag{45}$$

Die Ableitung bestimmt sich zu

$$y'(x) = \ln(x) \tag{46}$$

Beide Ausdrücke werden in die DGL eingesetzt

$$\ln(x) - \ln(x \cdot \ln(x) - (\ln(x) \cdot x - x)) = 0 \tag{47}$$
$$\ln(x) - \ln(x \cdot \ln(x) - \ln(x) \cdot x + x) \tag{48}$$
$$\ln(x) - \ln(x) = 0 \tag{49}$$

Aufgabe 41

Die Oberfläche eines Quaders mit der Seitenlänge x und der Höhe h ergibt sich zu:

$$A(x, h) = 2x^2 + 4hx \tag{50}$$

zusätzlich gilt die Randbedingung für das Volumen:

$$V = x^2 \cdot h \tag{51}$$

man kann wahlweise nach h oder x auflösen. Wir entscheiden uns für die Variable h.

$$h = \frac{V}{x^2} \tag{52}$$

diese Bedingung wird nun in die Funktion $A(x, h)$ eingesetzt und diese dann auf Minima untersucht:

$$A(x) = 2x^2 + 4\frac{V}{x^2}x \tag{53}$$
$$A(x) = 2x^2 + 4\frac{V}{x} \tag{54}$$
$$A'(x) = 4x - 4\frac{V}{x^2} = 0 \tag{55}$$

Nun gilt ja weiterhin $V/x^2 = h$:

$$A'(x, h) = 4x - 4h = 0 \tag{56}$$
$$x = h \tag{57}$$

Das Optimum ist also erfüllt, wenn die Seitenlänge gleich der Höhe ist, und es sich damit um einen Würfel handelt.

CC-BY-SA 3.0 Thomas Grethe / Mario Krieg
http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/de/